Probeabitur Mathematik

Das Abitur zu absolvieren, erfordert Durchhaltevermögen und viel Fleiß. Aus unserer langjährigen Erfahrung wissen wir, dass Motivation eine notwendige Voraussetzung für das Gelingen dieses Zieles ist. Darum haben wir für Sie die Möglichkeit geschaffen, einen Einblick in die Prüfungsbeispiele zu bekommen. Auf dieser Seite finden Sie ein ganzes **Mathematik-Probeabitur** bzw. **Prüfungsbeispiele nach Themengebieten.** Denn wir sehen es als unsere größte Aufgabe, diese Motivation zu stärken und Sie auf Ihrem Weg zum Wunschabschluss zu unterstützen! Unser gemeinsames Ziel ist es, dass Sie Ihren Schulabschluss erwerben. Wir wünschen viel Spaß!

Sie interessieren sich für die **Lösungen der Beispiele?** Dann schreiben Sie uns eine kurze Nachricht und wir schicken Ihnen die Lösungen per E-Mail zu.
Ihr Team der Privatakademie – Institut Dr. Rampitsch

Inhaltsverzeichnis

Probeabitur Mathematik Bayern (G8)

Analysis - Teil A
Analysis - Teil B
Analysis - Teil C

Stochastik - Teil A
Stochastik - Teil B

Geometrie - Teil A
Geometrie - Teil B

Prüfungsfragen Mathematik Nordrhein-Westfahlen

Stochastik - Teil A

Probeabitur Bayern (G8)

Analysis – Teil A

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{1-x^2}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Geben Sie D_f und die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse an.
b) Berechnen Sie die Wendepunkte der Funktion f und geben Sie die Wertemenge von f an.

2. Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die über ihrer maximalen Definitionsmenge die angegebenen Eigenschaften besitzt.

a) Der Graph der Funktion g ist achsensymmetrisch zur y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 5$ ist eine senkrechte Asymptote.

b) Die abschnittsweise definierte Funktion h ist nicht stetig an der Stelle $x = 2$.

3. Die Funktion g sei eine ganzrationale Funktion mit der Ableitungsfunktion $f`(x) = 0{,}5\,(x - 6)\,(x - 1)$ und $D_{f`} = D_f = IR$.

Skizzieren Sie den Graphen von $f`$ und ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f.

4. Zeigen Sie, dass der Graph der in IR definierten Funktion $g(u) = u^2 \cdot \sin(u)$ punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist und geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \cdot \sin(u)\, du$ an.

Analysis – Teil B

1. An der Universität in Regensburg gibt es seit mehreren Jahren eine sehr große Kaninchenpopulation. Um das Problem der extremen Vermehrung der Kaninchen einzudämmen, hat die Stadt einen Biologieprofessor damit beauftragt, die Population und deren Wachstum zu erfassen. Der Professor beobachtet die neu geborenen Kaninchen des Jahres 2018 und deren Nachkommen über mehrere Wochen und kommt zu folgender Aufzeichnung:

Zeit in Wochen	0	2	5	10	15	20	30
Anzahl der Kaninchen	30	34	43	60	80	105	180

Der Biologe lässt sich von seinem Kollegen, einem Mathematiker eine Formel für das Wachstum der Population erstellen. Der Mathematikprofessor vermutet, dass sich die Kaninchen anhand der Funktion $f(t) = ae^{bt}$ vermehren, wobei t die Anzahl der Wochen seit Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Anzahl der Kaninchen zum Zeitpunkt t beschreibt.

a) Bestimme aus der Kaninchenpopulation der ersten Beobachtungswoche und der nach 5 Wochen die Werte der Parameter a und b. (Runde auf zwei Nachkommastellen.)

b) Wann ist in dem durch $f(t)$ beschriebenen Modell die momentane Zuwachsrate größer als 8 Kaninchen pro Woche?

c) Berechne, wann es mehr als 150 junge Kaninchen am Campus in Regensburg gibt.

Der Mathematiker korrigiert aufgrund seiner fehlerhaften Formel seine Aussage und vermutet, dass sich die Kaninchenpopulation besser mit der Funktion $g(t)$ darstellen lässt.

$g(t) = g(t) = \frac{600}{1+19e^{-0{,}07t}}$

d) Bestimme welche Kaninchenzahl langfristig am Universitätsgelände zu erwarten ist, wenn man die Funktion $g(t)$ zugrunde legt.

e) Bestimme wann 90 % der maximalen Anzahl an Kaninchen den Campus bevölkern.

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 5x^0 - 3 - \sqrt{12-2x}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_f. Berechnen Sie den Schnittpunkt von G_f mit den Koordinatenachsen, untersuchen Sie das Verhalten von G_f für $x \to -\infty$ und geben Sie $f(3)$ an.

b) Bestimmen Sie den Term der Ableitungsfunktion f. Bestimmen Sie außerdem $\lim\limits_{x \to 6} f`(x)$ und beschreiben Sie, welche Eigenschaft für G_f aus diesem Ergebnis folgt.

c) Geben Sie das Monotonieverhalten von G_f an und untersuchen Sie Gf auf Symmetrie.

d) Berechnen Sie $f(-1)$ und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

e) Die Funktion f ist in D_{f*} umkehrbar. Geben Sie die Umkehrfunktion f^* von f und deren Definitionsmenge an.

Analysis – Teil C

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

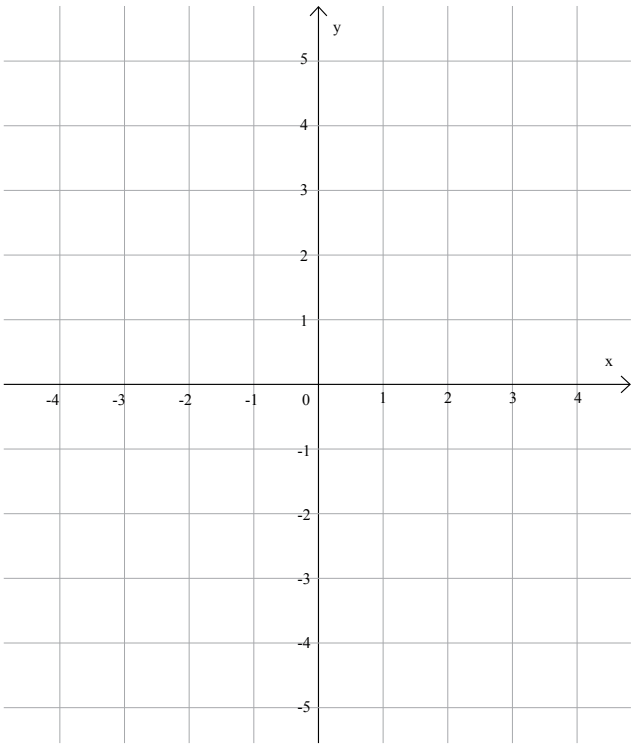
a) Geben Sie D_f sowie die Gleichungen der zwei Asymptoten von G_f an.

b) Zeigen Sie, dass $f(x)$ zu folgendem Term äquivalent ist: $\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

c) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse und bestätigen Sie rechnerisch, dass G_f die x-Achse nicht schneidet.

d) Der Punkt (-2|-3) ist Hochpunkt und der Punkt (0|1) Tiefpunkt von G_f. Weisen Sie durch Rechnung die Lage der zwei Extrempunkte nach.

e) Tragen Sie den Hochpunkt und den Tiefpunkt von G_f sowie die zwei Asymptoten in das gegebene Koordinatensystem ein und skizzieren Sie dann den Graphen von f in dieses Koordinatensystem.



Stochastik – Teil A

1. 30 Polizeidienstanwärter unterziehen sich einem Reaktionstest, bei dem sie mit der rechten Hand eine Taste betätigen müssen, nachdem ihnen ein akustischer Reiz dargeboten wurde. Die folgende Tabelle mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ zeigt, die gerundeten Reaktionszeiten der Testpersonen.

Reaktionszeit in Sek.	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Anzahl der Personen	b	6	a	b	3

a) Berechnen Sie die Werte a und b, wenn bekannt ist, dass genau 21 Anwärter höchstens 0,6 Sekunden Reaktionszeit haben.

b) Die Zufallsgröße X gibt die Reaktionszeit einer zufällig ausgewählten Testperson an. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße an. Berechnen Sie mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

2. Nachdem die Verfilmung von Herr der Ringe erfolgreich in den Kinos gezeigt wurde, veröffentlicht eine Tageszeitung das repräsentative Ergebnis einer Umfrage unter Jugendlichen. Der Umfrage zufolge hatten 88 % der befragten Jugendlichen den Roman zum Zeitpunkt des Filmstarts nicht gelesen, 18 % sahen die Verfilmung. Von den Befragten, die laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts bereits gelesen hatten, gaben 60 % an, den Film bereits gesehen zu haben.

Es werden nun folgende Ereignisse betrachtet:

A: „Eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person hatte laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts bereits gelesen."
B: „Eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person sah laut Umfrage die Verfilmung."

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person, die laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Filmstarts noch nicht gelesen hatte, angab, die Verfilmung gesehen zu haben.

b) Beschreiben Sie das Ereignis $\bar{A} \cup \bar{B}$ im Sachzusammenhang und bestimmen sie dessen Wahrscheinlichkeit.

Stochastik – Teil B

1. In Deutschland gibt es jährlich eine Studie zur Erfassung der benutzten Fortbewegungsmittel innerhalb der jungen Bevölkerung. Im Jahr 2018 wurden vor allem Bürger im Alter von 18 bis 25 Jahren befragt.
Die Zeitschrift „Der Spiegel" hat anhand ausgewählter Ergebnisse dieser Studie die Aussage von insgesamt 200 Befragten wiedergegeben, von denen 98 weiblich sind.
42 weibliche Deutsche und 52 männliche geben an regelmäßig ein Fahrrad zu benutzen. 77 junge Frauen und 87 junge Männer fahren mit öffentlichen Verkehrsmitteln wie dem Bus oder der Bahn. 65 männliche und 54 weibliche Befragte sind mit dem eigenen motorisierten Zweirad unterwegs. 37 Frauen und 62 Män-

ner bewegen sich mit dem Kfz fort.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus den 200 Deutschen zufällig ausgewählte Person weiblich ist und kein motorisiertes Zweirad benutzt.

b) Aus den 200 Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt, die ein motorisiertes Zweirad besitzt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person weiblich ist.

c) Begründen Sie, dass die Ereignisse „Eine aus den 200 Befragten zufällig ausgewählte Person besitzt ein motorisiertes Zweirad." und „Eine aus den 200 Befragten zufällig ausgewählte Person ist eine Frau." abhängig sind.

d) Der Studie zufolge besitzen 55 % der Frauen im Alter von 18 bis 25 Jahren ein motorisiertes Zweirad. Geben Sie den Wert der Summe $\sum_{i=0}^{12} B(25; 0{,}55; i)$ in Prozent an. Begründen Sie, dass dieser Wert im Allgemeinen keine reelle Wahrscheinlichkeit angeben kann.

2. Der Studie zufolge benutzen deutlich weniger als 90 % der jungen Deutschen ein öffentliches Verkehrsmittel. Daher wird an den Stadtrat von Regensburg der Wunsch herangetragen, die öffentlichen Verkehrsmittel für junge Menschen attraktiver zu gestalten, indem es einen „Jungen-Erwachsenen-Rabatt" auf die Fahrscheine gibt. Der Stadtrat möchte die dafür erforderlichen finanziellen Mittel nur dann bewilligen, wenn weniger als 90 % der Regensburger im Alter von 18 bis 25 Jahren öffentliche Verkehrsmittel nutzen.

a) Die Entscheidung über die Bewilligung der finanziellen Mittel soll mithilfe einer Befragung von 100 zufällig ausgewählten Regensburgern im genannten Alter getroffen werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die finanziellen Mittel irrtümlich bewilligt werden, soll höchstens 5 % betragen.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel, bei der zugleich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die finanziellen Mittel irrtümlich nicht bewilligt werden, möglichst klein ist.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 befragten Regensburgern genau 85 mit Bus oder Bahn fahren, wenn der Anteil derjenigen Regensburger Bürger, die ein öffentliches Verkehrsmittel benutzen, unter den jungen Erwachsenen ebenso groß ist, wie unter den in Aufgabe 1 erfassten Deutschen.

3. In einer Urne befinden sich acht Kugeln. Drei Kugeln sind mit der Zahl 1 gekennzeichnet, zwei mit der Zahl 2 und drei mit der Zahl 3.

a) Es wird dreimal ohne Zurücklegen eine Kugel gezogen und die Ereignisse A und B betrachtet:

A: Es werden drei gleiche Zahlen gezogen.
B: Es werden drei unterschiedliche Zahlen gezogen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B.

b) Nun wird aus derselben Urne achtmal mit Zurücklegen gezogen. Formulieren Sie ein Ereignis C, für das gilt:

$$P(C) = 1 - \left(\binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8 + \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \right)$$

Geometrie – Teil A

1. Die Ebene E ist in ihrer Koordinatenform gegeben mit $E: 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 12 = 20$

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung einer zu E parallelen Ebene H, welche durch den Punkt P (-2/ 1/ -9) verläuft.

b) Geben Sie eine mögliche Gerade g an, die senkrecht auf der Ebene E steht.

2. Zwischen die Ebenen E und $G: 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 30 = 0$ soll eine Kugel gelegt werden, sodass diese beiden Ebenen die Kugeloberfläche berühren.

a) Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen E und G.

b) Geben Sie Radius und Mittelpunkt einer solchen Kugel K an.

c) Beschreiben Sie das geometrische Gebilde, auf dem die Mittelpunkte aller Kugeln liegen, welche diese Bedingung erfüllen.

Geometrie – Teil B

Eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet, lässt sich modellhaft durch die x1x2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems beschreiben. Die x_1-Achse zeigt in Richtung Osten, die x_2-Achse in Richtung Norden, wobei eine Längeneinheit im Modell 1 km in der Realität entspricht. Ein Flugzeug F_1 steigt unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn geradlinig auf – im Modell vom Punkt P (-10/ 0/ 0) aus entlang der Geraden

$$g_1: \vec{X} = \vec{P} + \omega \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ mit } \omega \in \mathrm{IR}.$$

Die Flugbahn eines weiteren Flugzeugs F_2 verläuft im Modell entlang der Geraden

$$g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ mit } \mu \in \mathrm{IR}.$$

a) Geben Sie die Himmelsrichtung an, in der F_1 fliegt und begründen Sie, dass F_2 eine konstante Flughöhe annimmt.

b) Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels der Flugbahn von F_1 gegen die Horizontale.

c) Bestätigen Sie rechnerisch, dass sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge senkrecht schneiden. Begründen Sie, dass sich die Flugzeuge dennoch nicht zwingend kollidieren.

d) Der Richtungsvektor von g_2 beschreibt im Modell die konstante Geschwindigkeit des Flugzeugs F_2 in km/h. Geben Sie die physikalische Bedeutung des Parameters μ an.

e) Eine Radarstation, deren Position im Modell durch den Punkt R (20/ 30/ 0) veranschaulicht wird, erfasst alle Objekte im Luftraum bis zu einer Entfernung von 50 km. Berechnen Sie die Länge der Flugstrecke von F_2 in dem vom Radar erfassten Bereich.

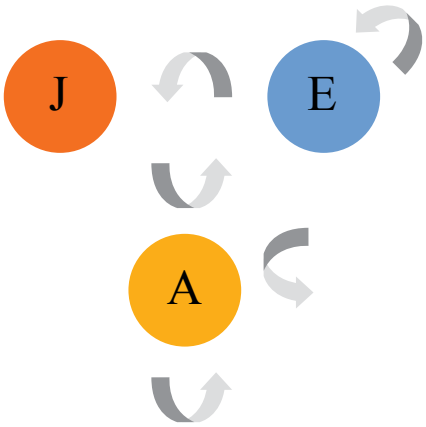
Prüfungsfragen Nordrhein-Westfalen

Stochastik - Teil A

Aufgabenstellung

Themengebiet: Populationsdynamik eines Damwildbestandes im Sauerland
Bei der statistischen Erhebung einer Damwild-Population (Cervidae) im südlichen Westfalen (Sauerland) hat ein Jagdverband die Entwicklung der Population im Zweijahrestakt dokumentiert. Dabei haben die Wissenschaftler die Tiere in drei Gruppen eingeteilt. Sie unterscheiden Jungtiere (J), erwachsene Tiere (E) und Alttiere (A) voneinander. Unter Berücksichtigung populationsdynamischer Modelle wurden folgende Ergebnisse festgehalten:

- von den Jungtieren erreichen nach einem Takt 50 Prozent das Erwachsenenstadium
- 80 Prozent der erwachsenen Tiere überleben einen Takt und erreichen somit das Alttierstadium
- die erwachsenen Tiere erreichen innerhalb eines Taktes ein Nachkommensrate von 60 Prozent ihres Bestandes
- von den Alttieren sterben 40 Prozent



Quelle: Olaf A. v. der Horst

1.1 Betrachten Sie den obenstehenden Übergansgraphen und ergänzen Sie die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten.

1.2 Stellen Sie die zum Sachverhalt (s. Aufgabenstellung, Übergangsgraph) passende Übergangsmatrix M auf. Begründen Sie, ob es sich um eine stochastische Matrix handelt.

1.3 Zu Beginn lag eine Anfangsverteilung von 40 Jungtieren, 100 erwachsenen und 60 Alttieren vor. Berechnen Sie, wie sich die Gesamtpopulation der Tiere in diesem Zeitraum entwickelt. Erläutern Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang!

1.4 Die Abschussrate für Damwild wird erheblich eingeschränkt, sodass die Nachwuchsrate von 60 auf 210 Prozent ansteigt. Zeigen Sie, dass die Population nun langfristig nahezu unbegrenzt wächst.

1.5 Zeigen Sie auch, dass sich beim Einstellen der Nachwuchsrate auf 200 Prozent auf lange Sicht eine stabile Situation einstellt, bei welcher die Population weder ausstirbt noch unbegrenzt wächst. Erläuern Sie die Ergebnisse!

Sie interessieren sich für die **Lösungen der Beispiele?** Dann schreiben Sie uns eine kurze Nachricht und wir schicken Ihnen die Lösungen per E-Mail zu. Ihr Team der Privatakademie – Institut Dr. Rampitsch

Kontakt:

Privatakademie – Institut Dr. Rampitsch
Arnulfstraße 83, 80634 München

089/54 88 671 10
muenchen@privatakademie.de

www.privatakademie.de